VIII Convegno-Corso "Matematica & Realtà"

Insegnare Matematica senza frontiere

Spoleto 5-7 ottobre 2012

Probabilità e statistica al BAC europeo 2012
Guida alla risoluzione passo-passo con TI-Nspire CX CAS software

(A cura di Domenico Cariello – *domenico.cariello@gmail.com*)

NOTA: In questa attività sarà usata la versione 3.2 del software TI-Nspire CX CAS. Le proposte di lavoro utilizzano comandi e istruzioni compatibili con le versioni precedenti del software. Nella peggiore delle ipotesi cambia il posto delle voci dei menu.
L'attività è riproducibile anche con il palmare TI-Nspire CX CAS.
Chi legge non si faccia scoraggiare dalla apparente complessità delle azioni da compiere: vi assicuro che è più facile fare le cose che leggerle…..provare per credere.
I quesiti saranno risolti utilizzando vari ambienti, in particolare l'ambiente "calcolatrice", "grafici" e "notes".

Problema B3 (BAC europeo 2012)

(risolto con il supporto del software/palmare TI-Nspire CX CAS,
obbligatori negli ultimi 2 anni delle scuole europee)

I diametri delle uova prodotte in una fattoria hanno una distribuzione normale, con una media di 60 mm e una deviazione standard di 5 mm.

<u>Quesito a)</u>
Il 98 % della produzione ha diametro compreso nell'intervallo [60-k,60+k]
Calcolare il valore di k in mm, approssimato alla seconda cifra decimale.

Premessa
Per risolvere questo quesito è necessario avere conoscenze di base sulla distribuzione normale (o di Gauss) perché riveste un ruolo importante nella teoria della probabilità e in statistica.
Il motivo è che i dati relativi a moltissimi fenomeni naturali si distribuiscono secondo una funzione il cui grafico, per la sua, forma viene detto a *campana*, *gaussiana* (Gauss, 1777-1855) o *normale*,

$$f1(x):=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)^2}$$

Fig. 1 – Funzione di distribuzione normale (o di Gauss)

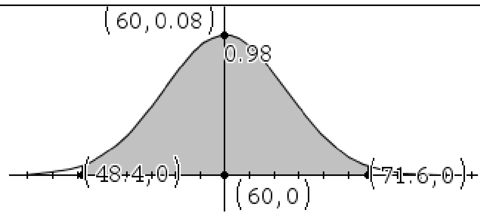


Fig. 2 - Grafico della funzione gaussiana con μ=60 e σ=5

Questo è il più importante modello teorico nell'analisi statistica di moltissimi fenomeni reali, un prezioso "oggetto matematico" che trova numerose applicazioni nella modellizzazione della realtà.
Sono necessarie quindi conoscenze e capacità di utilizzare la distribuzione normale di probabilità (gaussiana) per modellizzare situazioni problematiche reali.

Da circa un secolo il quesito si può risolvere utilizzando la "tabella della distribuzione normale standardizzata" elaborata dal matematico Sheppard: noti la media e la deviazione standard, si devono standardizzare i dati cioè trasformare i valori $\mathbf{x_i}$ in modo che la **media** sia **zero** e la **dev.st** sia **1**; la

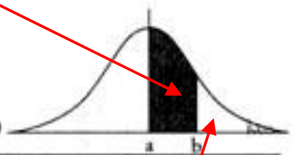
distribuzione normale standardizzata si ottiene con la trasformazione lineare dei **punti grezzi** in **punti z** con la formula: $z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$

poi si utilizza la “tabella della distribuzione normale standardizzata”, dalla sua lettura si ricava la soluzione. Un percorso “tecnico” privo di significato “matematico”.

<u>Un esempio:</u> *Noti la media e la deviazione standard di una variabile casuale continua, supponiamo di aver i dati grezzi* $\mathbf{x}_i$ *e di voler sapere con quale probabilità i valori grezzi siano compresi tra due valori grezzi prestabiliti, bisogna trasformare questi estremi in punteggi standardizzati* **z** *e supponiamo che essi siano 0 e 1,96, il problema ora è quello di voler conoscere con quale probabilità un valore z sia compreso 0 e 1,96.*

<u>Soluzione con l’uso della tabella di Sheppard</u>
Osservando la prima colonna dei punti z, si deve scendere fino a trovare z=1,9 e, rimanendo nella stessa riga fino a trovarsi in quella indicata con 6. Il valore che troverete nel posto indica la porzione di area compresa tra le due ascisse: 0,4750. Poiché l’area totale sotto la curva alla destra dell’ascissa corrispondente a z=0,00 è 0,5000, **l’area** alla destra dell’ascissa z=1,96, l’area compresa tra z=0 e z=1,96 sarà: 0,5000-0,4750=0,0250. Una procedura “tecnica” necessaria quando non c’erano altri strumenti.

<u>Risposta</u>: *la probabilità che 0<z<1.96 è del 2,5%*



TAV. B. *Aree della distribuzione normale standard tra a = 0 e b > 0*

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	8.032	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4351	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936

Allo stesso risultato si può pervenire calcolando l’integrale definito della funzione di densità di probabilità della distribuzione normale standardizzata, nell’intervallo [0,1.96].

$$f(z) = \int_{0}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

C'è un solo problema: il non facile calcolo dell'integrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$!!!!

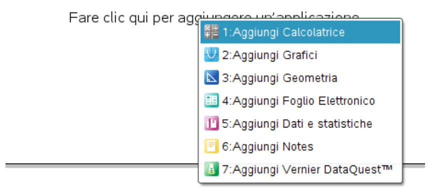
Questo è il passato!

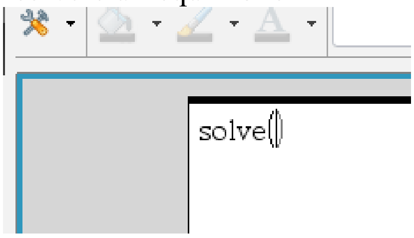
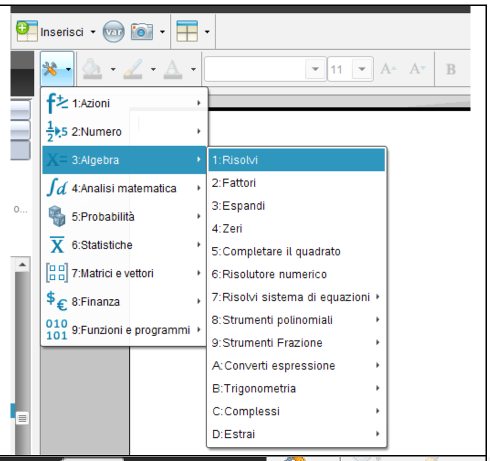
Con queste procedure tutta l'attenzione è concentrata dai calcoli; inoltre, in un contesto d'esame, questi quesiti sono improponibili perché assolutamente insufficienti i pochi minuti disponibili per sviluppra i calcoli necessari.
A maggior ragione è impensabile proporre una contesto problematico reale da modellizzare e da risolvere che necessita una riflessione sui dati a disposizione, sulle relazioni tra essi, una scelta dei modelli matematici necessari, sul loro corretto uso e sull'interpretazione dei risultati.

Il presente!

Oggi le tavole di Sheppard non sono più necessarie, ci sono altri strumenti che non possiamo più ignorare
E' opportuno ricordare quanto proposto da "Matematica 2003" (10 anni fa) nella premessa, in particolare a proposito degli strumenti CAS per le attività didattiche nel "Laboratorio di matematica":
"(…) *Il loro uso consente di limitare il calcolo simbolico svolto con carta e penna ai casi più semplici e significativi, affidando al CAS i calcoli più laboriosi. Il vantaggio è duplice, perché da una parte consente di concentrarsi sugli aspetti concettuali, dall'altra permette di affrontare problemi più complessi, più ricchi e, sicuramente, meno artificiosi di quelli che èpossibile affrontare senza l'ausilio di un potente strumento di calcolo.*(…)"

Segue una risoluzione passo-passo del quesito a) utilizzando il software Ti-nspire CAS, ver. 3.2. che consente agli alunni di analizzare il problema, scegliere il modello matematico giusto e interpretare correttamente i risultati, tutto in pochi minuti.

1	*<u>Avvertenza</u>: molte istruzioni sono attivabili in vari modi, in questa scheda di lavoro, se ne utilizzerà una sola.* Dopo aver avviato TI-nspire software CAS**,** creare un nuovo documento, cliccando su **File/Nuovo documento** oppure **(Ctrl+N)** Si può scegliere tra 7 ambienti integrati fra loro e interattivi Cliccare su "Aggiungi calcolatrice".	
2	Si apre una pagina col cursore in alto a sinistra per l'input; l'output è sullo stesso livello a destra. Inserendo nuovi calcoli la riga d'inserimento scende riempendo la pagina. Per cancellare eventuali righe inserite, spostarsi con le frecce-cursore sulla riga da cancellare e poi premere CANC	

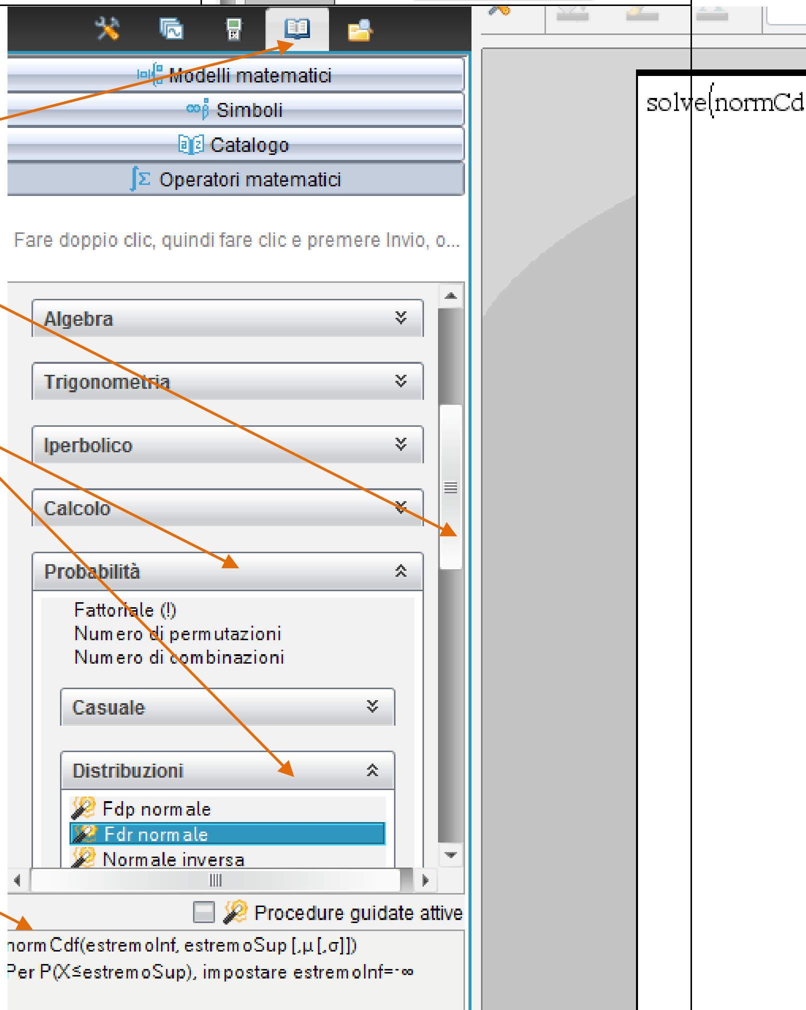
<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>Attiviamo l’istruzione per risolvere un’equazione
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Calcoliamo il valore di k inserendo l’istruzione per risolvere l’equazione della distribuzione normale in funzione dell’intervallo [60-k; 60+k]
Sulla “barra degli strumenti del documento” cliccare su “ utilità” e quindi, facendo scorrere la barra laterale, su “probabilità/distribuzioni” (oppure “statistiche/distribuzioni”), quindi cliccare su “Fdr normale”

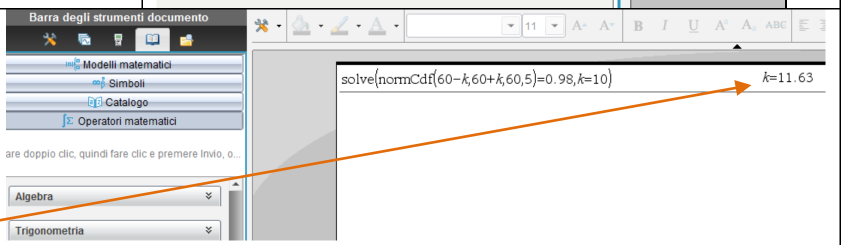
Nel nostro caso l’istruzione è:
normCdf (normal Calculating distribution function)

La sintassi di questa istruzione è in basso

Nel nostro caso:
normCdf(60-k,60+k,60,5)

L’istruzione completa per calcolare il valore di k è:

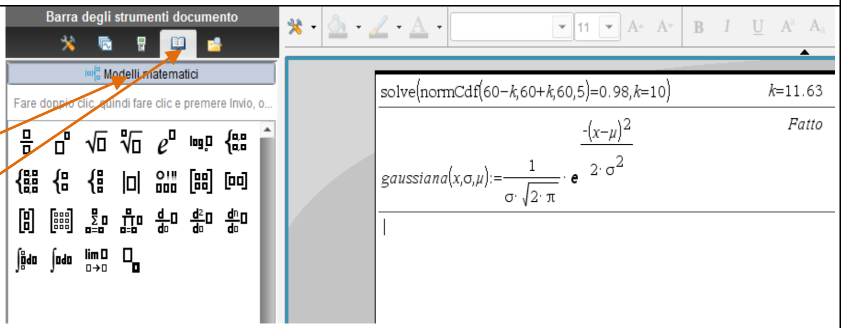
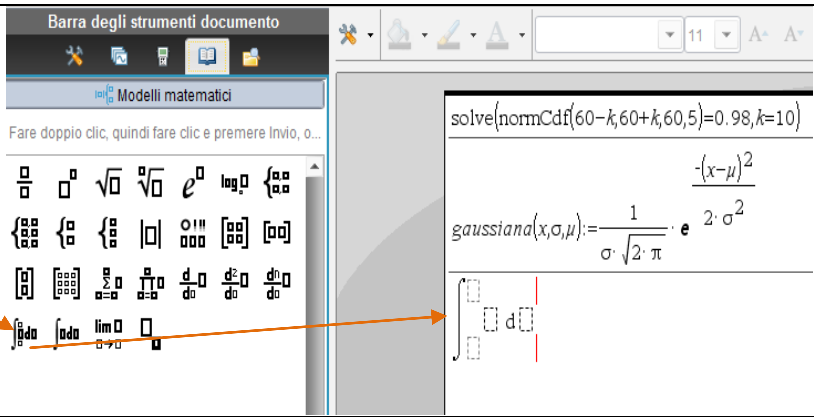
solve(normCdf(60-k,60+k,60,5)=0.98,k=10)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>E’ possibile anche digitare interamente l’istruzione con la tastiera.

Dopo l’invio, la risposta compare a destra:
k=11.6</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2"><u>Risposta al quesito a):</u>
k=11.6

Interpretazione della soluzione:
L’intervallo in cui cade il 98% delle uova è (in mm.) [60-11.6,60+11.6] cioè [48.4,71.6]mm.</td>
</tr>
</table>

Il primo quesito è risolto. Prima di passare al secondo vediamo come , in un contesto diverso dall’esame, si può “fare matematica” mettendo a disposizione degli allievi vari ambienti di rappresentazione semiotica per favorire l’astrazione, la riflessione, il ragionamento, l’approfondimento. Seguono alcuni esempi e modalità d’uso degli strumenti CAS. Altri se ne possono costruire per accrescere motivazione e coinvolgimento degli strudenti. Unico limite la nostra creatività.

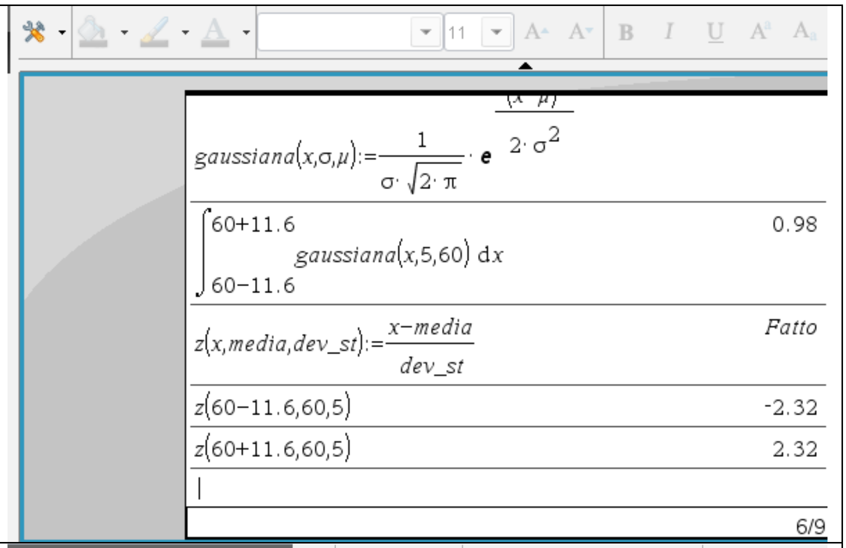
In un contesto didattico è utile ed opportuno fare delle verifiche dei risultati ottenuti, utilizzando altri modelli matematici, esplorare in modo interattivo il fenomeno oggetto di analisi, cambiando i dati ed utilizzando vari ambienti di rappresentazione e confrontare vari modelli (ad es. curva normale e curva standardizzata) .

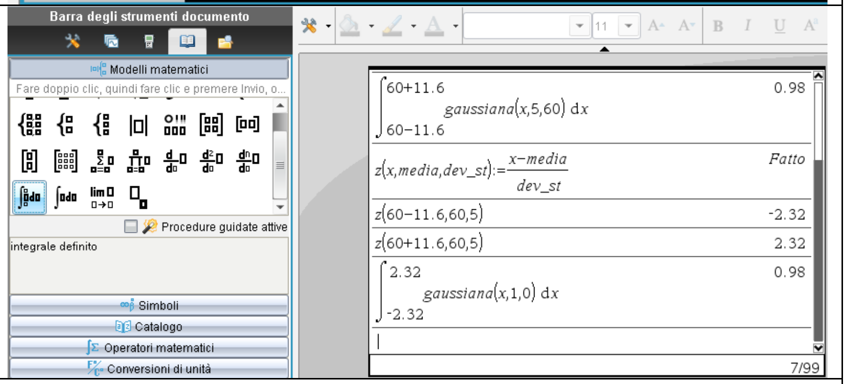
1	Possiamo fare una verifica della risposta calcolando l’integrale definito della gaussiana. Inseriamo la funzione “gaussiana” che dipende da x,μ,σ utilizzando “modelli matematici” da “utilità”	
2	Per calcolare l’area nell’intervallo [48.4,71.6] da “utilità”, “modelli matematici”, poi doppio un clik sul simbolo di “Integrale definito”	

Per inserire delle parti già scritte e non modificabili che si trovano nelle righe al di sopra della riga d’introduzione, si selezionano e si clicca su INVIO; vengono copiate nella riga d’inserimento.

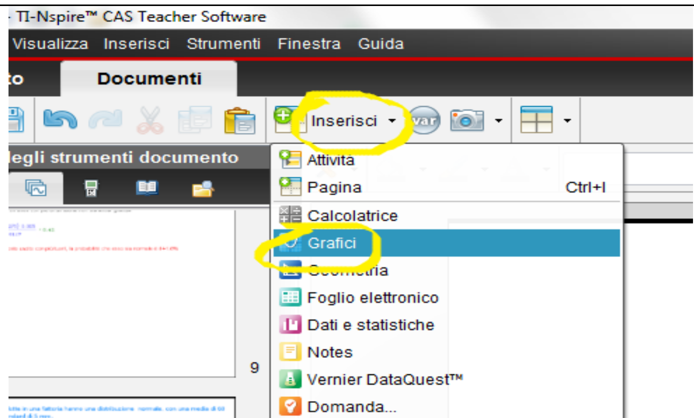
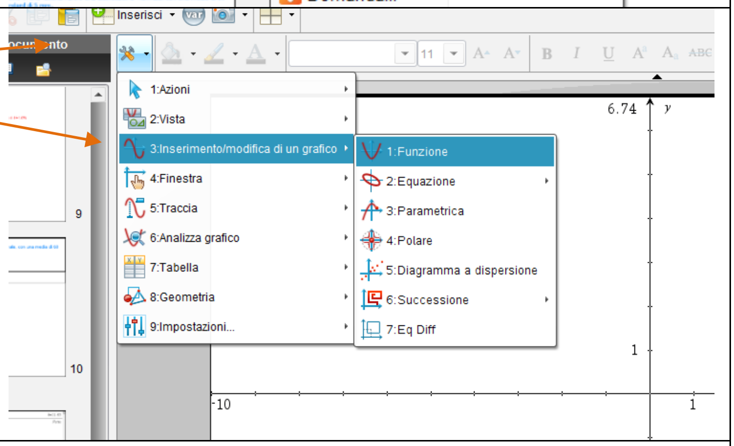
3	Completare il modello inserendo opportunamente i valori e simboli, scrivendo 5 e 60 al posto di σ e μ e inserendo gli estremi dell’intervallo d’integrazione. Il risultato, 0.98, conferma la soluzione.	solve(normCdf(60−k,60+k,60,5)=0.98,k=10) $\quad k=11.63$ $gaussiana(x,\sigma,\mu):=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ $\quad$ *Fatto* $\int_{60-11.6}^{60+11.6} gaussiana(x,5,60)\,dx$ $\quad 0.98$

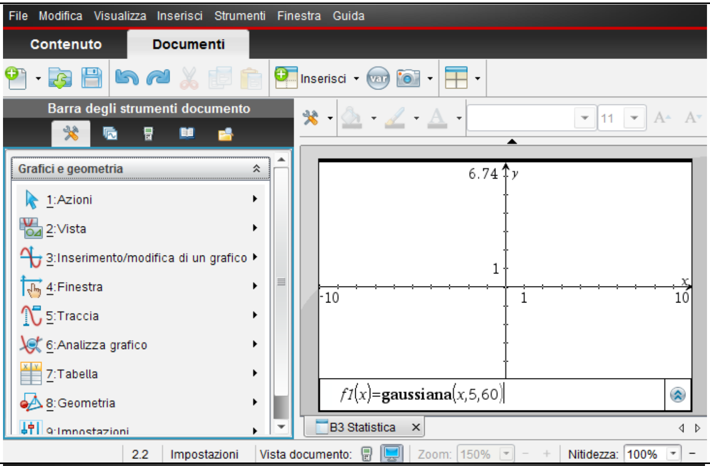
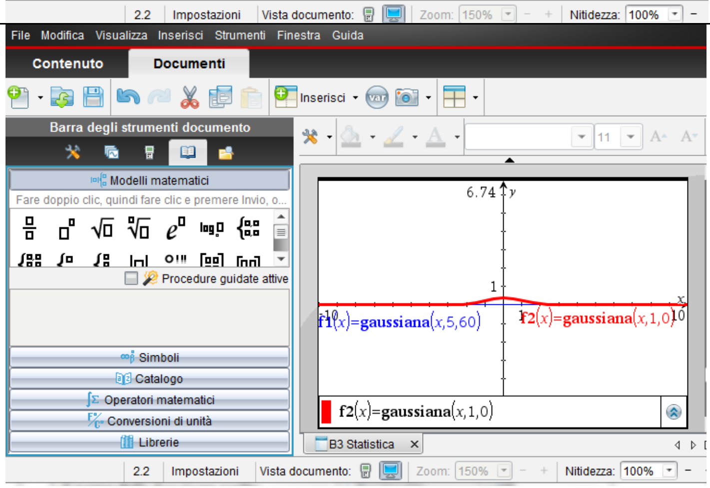
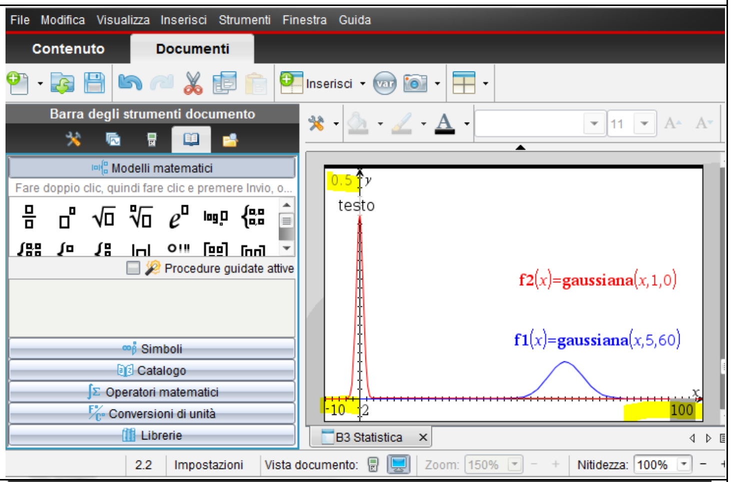
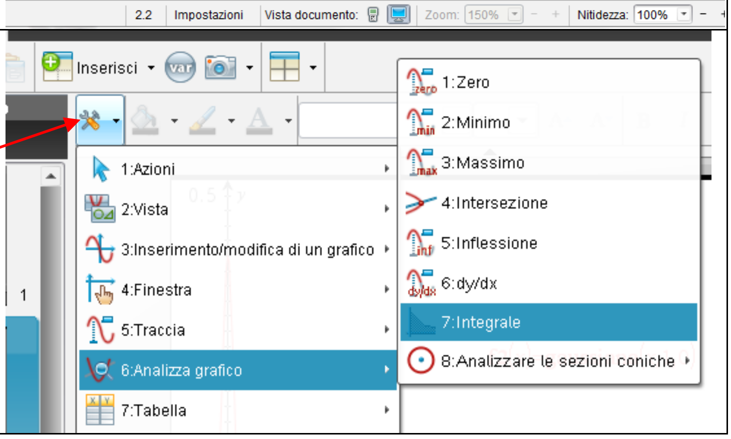
<table>
<tr><td>4</td><td>2° verifica
Calcoliamo l'area della "gaussiana standardizzata" dopo aver trasformato gli estremi dell'intervallo [60-11.6, 60+11.6]
a) definendo una funzione Z a più variabili
b) calcolandone il valore per x=60±11.6, media=60, dev_st=5

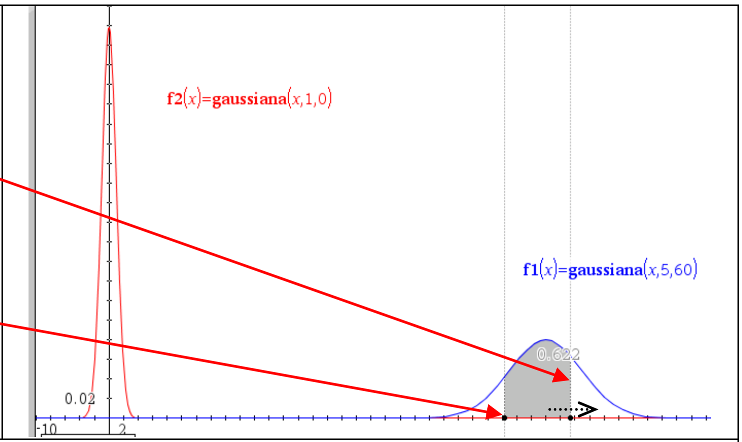
il nuovo intervallo sarà [-2.32, 2.32]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Calcoliamo ora l'integrale definito della gaussiana standardizzata nel suddetto intervallo.

Verifica OK!
Anche questo integrale è 0.98</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">SINTESI VERIFICA: L'area sottesa ad una gaussiana tra i valori $x=\boldsymbol{a}$ e $x=\boldsymbol{b}$ è uguale all'area normalizzata compresa tra $\boldsymbol{z}_a$ e $\boldsymbol{z}_b$, dove $\boldsymbol{z}_a$ è il punteggio standardizzato di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{z}_b$ è il punteggio standardizzato di $\boldsymbol{b}$.
Costruiamo ora un modello grafico del problema e facciamo un'ulteriore esplorazione-verifica.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Andiamo nell'ambiente grafico-dinamico e, in modalità interattiva, esploriamo le varie possibilità.

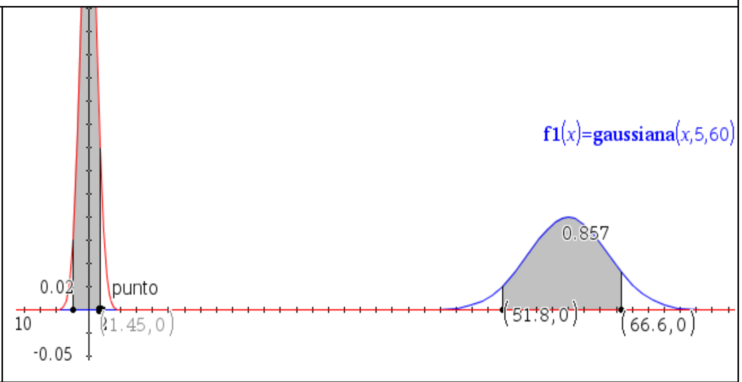
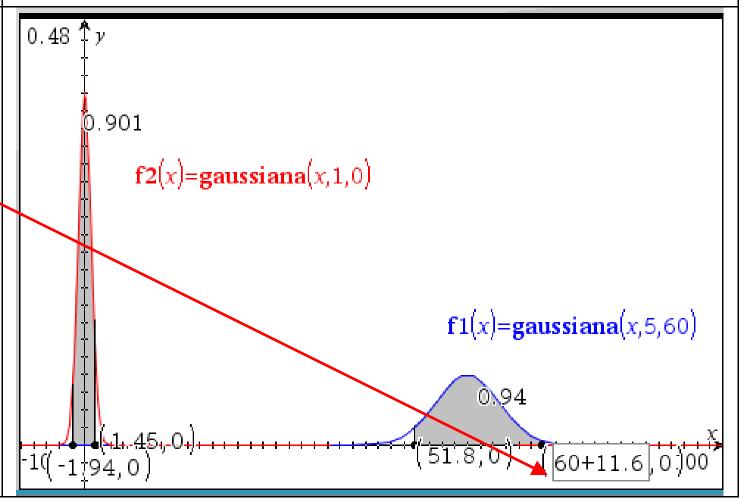
Aprire l'ambiente "grafici" cliccando si "inserisci" e "grafici".

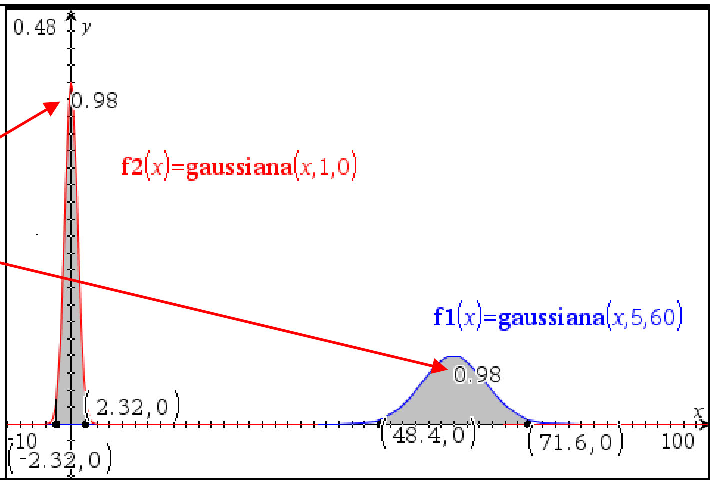
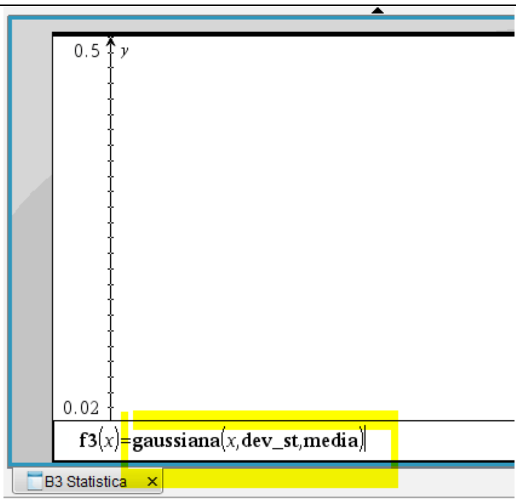
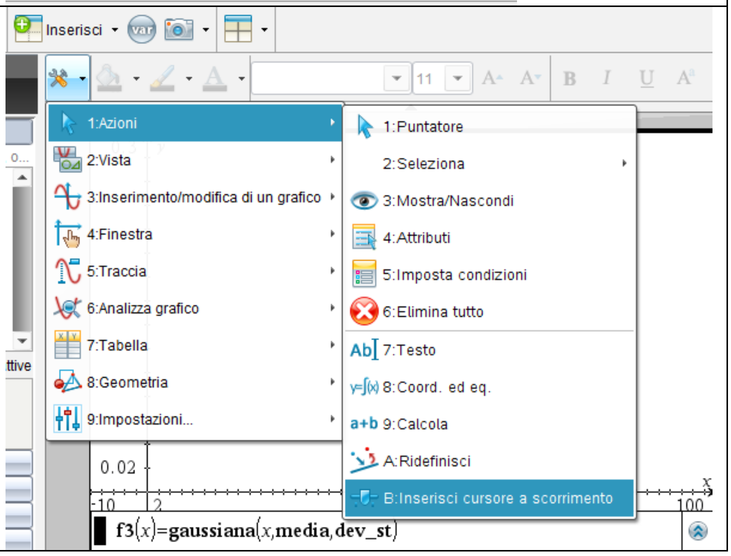
Sul desktop compare un sistema di assi cartesiani ortogonali</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>E' possibile inserire la gaussiana attivando cliccando su "strumenti documento",
"inserimento di un grafico",
funzione" in formato cartesiano.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">NOTA: le opzioni possono essere fatte anche digitando il numero adiacente (1-Funzione)</td></tr>
</table>

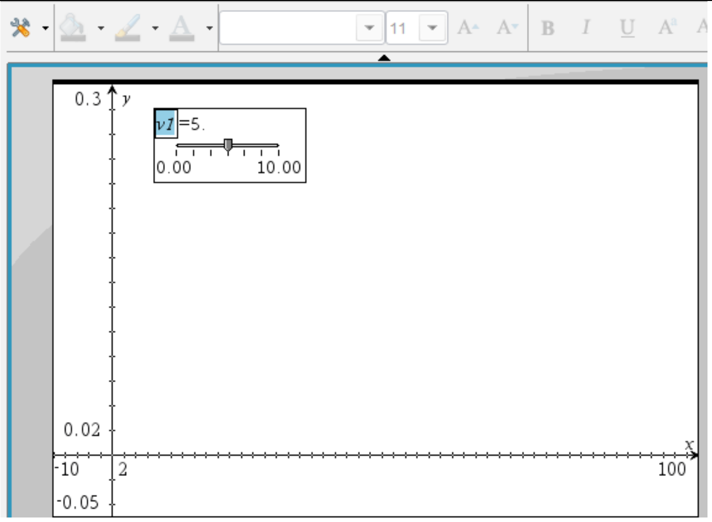
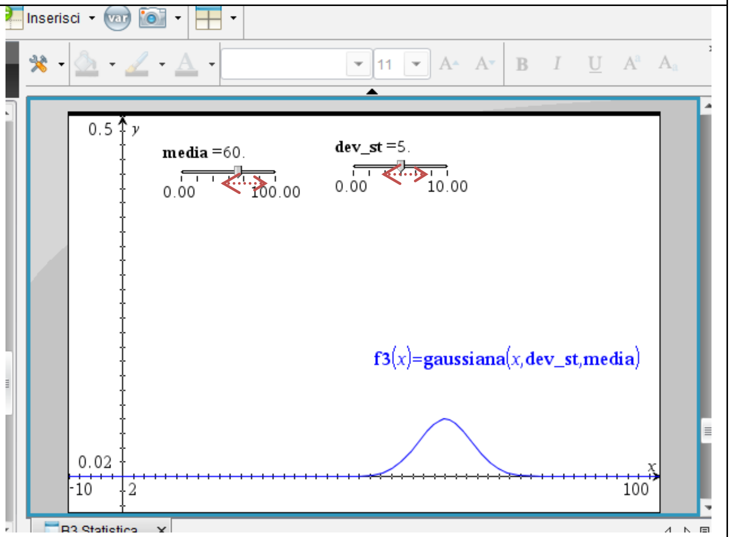
8	Si apre una barra d'inserimento nella parte inferiore dello schermo con il cursore lampeggiante accanto a *f1(x)=* [Si può aprire questa barra da tastiera con TAB]; è possibile inserire fino a 99 funzioni, per questo sono numerate] Inserire la nostra gaussiana utilizzando il nome della funzione scelto nell'ambiente integrato "calcolatrice" con σ=5 e μ=60 e cliccare su INVIO	
9	Per inserire la "funzione distribuzione standardizzata" cliccando su TAB per aprire la "barra inserimento funzioni"; in fondo al grafico compare *f2(x)=*. *Inseriamo la funzione con* con σ=1 e μ=0 e cliccare su INVIO Compare il grafico della "gaussiana standardizzata" mentre non compare la "gaussiana normale". E' possibile uno zoom sul grafico modificando l'unità di misura (afferrando e trascinando) oppure gli estremi della finestra.	
10	Utilizziamo la seconda possibilità; un click destro sui quattro estremi e digitare questi valori: asse X [-10,100], asse Y [-0.05,0.5] Queste modifiche ci consentono di visualizzare la gaussiana e la gaussiana standardizzata. Entrambe consentono di verificare graficamente quanto trovato algebricamente.	
11	Calcoliamo, in pochi istanti, l'area sottesa alle due curve. Cliccare su "strumenti documento" poi su "Analizza grafico" e "Integrale"	

12	Avvicinarsi ad uno dei grafici e con un doppio click fissare il primo estremo; spostarsi quindi verso destra e, con un altro click, fissare il secondo estremo. E' possibile leggere il valore dell'area; è possibile anche "afferrare e trascinare" uno degli estremi ed avere il valore dell'area. Ripetiamo il procedimento con la "gaussiana standardizzata"	

NOTA:
Le azioni di afferrare e trascinare sono le operazioni base di ogni software di geometria dinamica. Attraverso il trascinamento un oggetto (in questo caso uno degli estremi dell'intervallo) può essere spostato a piacere e tutti gli oggetti ad esso collegati (qui l'area) vengono modificati di conseguenza. Per rilasciare un oggetto basterà non tenere più premuto il tasto del mouse nella versione per PC o premere ESC nel Palmare.

13	Cliccando su "strumenti documento" poi su "Azioni" e "Coord. ed eq." possiamo dare agli estremi le proprie coordinate. Avvicinarsi con il cursore ad uno dei punti e fissare le coordinate visualizzate con un doppio click. E' possibile afferrare e spostare le coordinate degli estremi se necessario.	
14	Modifichiamo ora le ascisse dei punti inserendo i valori dei nostri estremi; Andare con il cursore sull'ascissa, doppio click e poi digitare il valore e quindi INVIO Ripetere la stessa procedura per tutti e quattro gli estremi.	

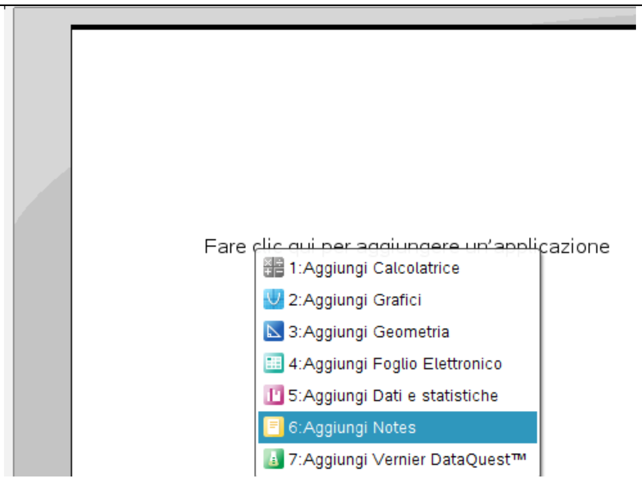
15	Anche il modello grafico ci consente di dedurre che la soluzione *x*=11.6 (oppure la soluzione standardizzata *z*=2.32) verificano la condizione perché in entrambi i casi l'area è 0.98	
	Ulteriore possibilità di esplorare interattivamente il modello.	
16	Premere TAB per inserire una nuova funzione nella barra d'inserimento inferiore. Per inserire la funzione utilizzare l'integrazione tra i vari ambienti e richiamare la funzione inserita precedentemente nell'ambiente calcolatrice(riga 3), senza assegnare alcun valore alle variabili. Accanto a *f3(x)*= digitare "**gaussiana**(x,,**dev_st**,**media**)"	
17	Da "strumenti documento" scegliere "azioni" e poi "inserisci cursore a scorrimento"	

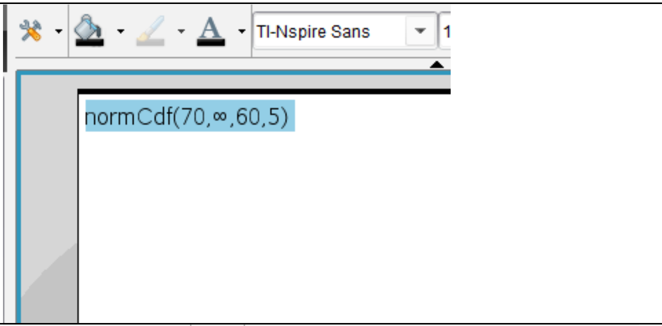
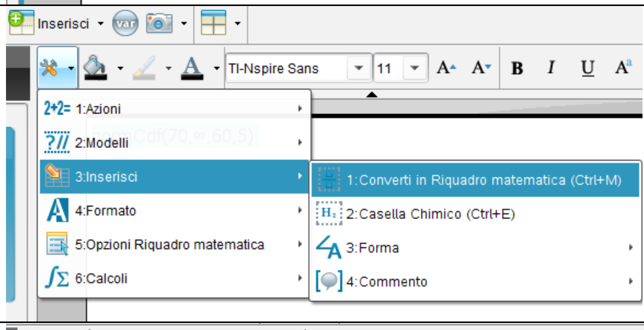
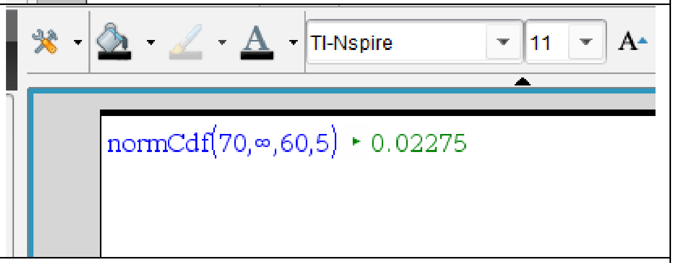
18	Si apre un riquadro che viene trascinato dal mouse fin quando non c'è un click destro. Viene selezionato "*v1*", nome provvisorio della variabile; scrivere "media" + INVIO; da questo momento il cursore assegnerà dei valori alla variabile "media"; modificare l'estremo superiore cliccando su 10 e digitare 100 perché bisogna visualizzare la nostra media che è 60. Afferrare e trascinare il cursore per verificare l'interattività.	
19	Ripetere la procedura per poter variare anche la Deviazione standard (dev_st); ora è possibile fare "sperimentare" agli allievi il legame che esiste tra le "variazioni numeriche" e "variazioni grafiche", chiedere una sintesi, stimolare una discussione guidata. Al docente il compito di dare una rigorosa sistemazione teorica a quanto sperimentato e osservato. Con questo strumento gli allievi "imparano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con il docente come nella antica bottega rinascimentale" (Premessa a Matematica 2003)	

Quesito b)

Le uova il cui diametro é maggiore o uguale a 70 mm sono classificate come extra-grandi (XL).

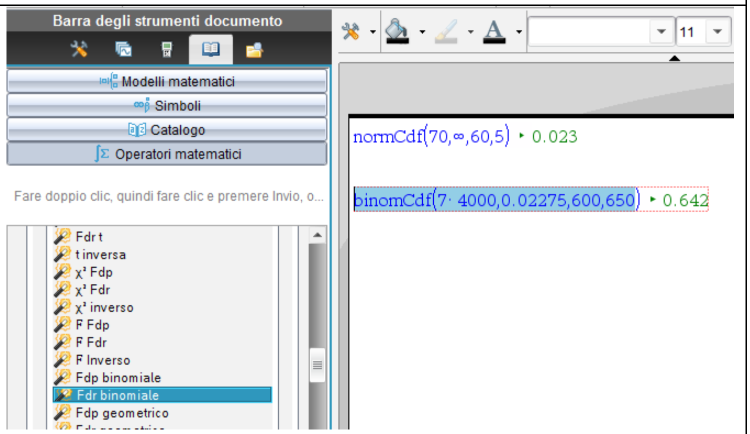
Dimostrare che le uova extra-grandi rappresentano circa il 2,275 % della produzione.

20	E' ancora un quesito di distribuzione normale. Per calcolare P(X≥70) possiamo utilizzare l'istruzione già utilizzata normCdf(inf, sup,σ,μ); in questo caso normCdf(70,∞,60,5) con l'ambiente "calcolatrice" Ma è possibile usare anche l'editor scientifico "Notes". Usiamo quest'ultima. Da "File" cliccare su "Nuovo documento Ti-nspire" oppure direttamente con CTRL+N e poi su "Aggiungi Notes"	

21	Inserire l'istruzione e selezionare con il cursore	
22	Da "Strumenti documento" scegliere "inserisci e poi "Converti in riquadro matematico"; scelta rapida con CTRL+M. L'istruzione viene limitata da un contorno tratteggiato rosso.	
23	Per avere il risultato cliccare su INVIO	

Risposta al quesito b):
il risultato P(X≥70) =0.02275 conferma che il 2.275% delle uova sono XL

Quesito c)
La fattoria produce 4000 uova al giorno.
Calcola la probabilità che, in 7 giorni, il numero totale delle uova extra-grandi sia un valore compreso nell'intervallo [600 ; 650].

24	Per risolvere il quesito bisogna utilizzare la distribuzione binomiale; all'istruzione si accede da "utilità", "operatori matematici", "probabilità", "Fdr binomiale" La sintassi è binomCdf(n,prob,inf,sup); nel nostro caso binomCdf(7*4000,0.02275,600,650) Selezionare e cliccare INVIO	

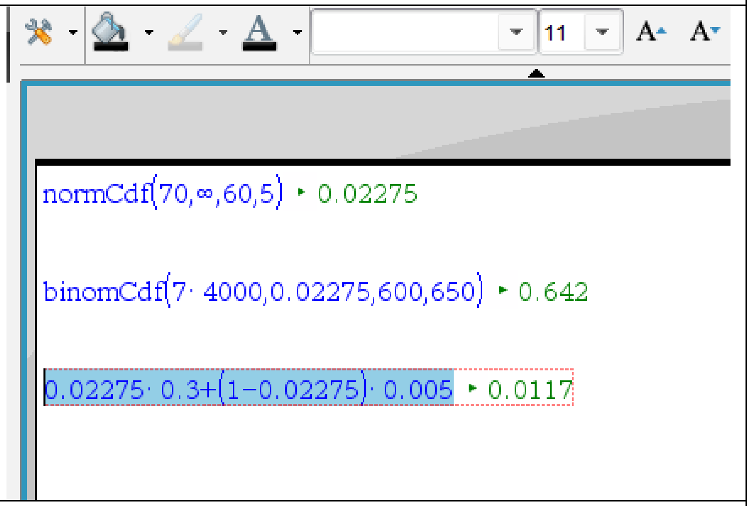
Risposta quesito c):
Il 64% delle uova ha un diametro compreso tra [600,650]mm.

Quesito d)
Alcune uova hanno più di un tuorlo.
In media, il 30 % delle uova extra-grandi hanno più di un tuorlo, mentre solo il 0,5% delle altre hanno più di un tuorlo.

Calcolare la probabilità che un uovo, scelto a caso tra le uova prodotte in questa fattoria, abbia

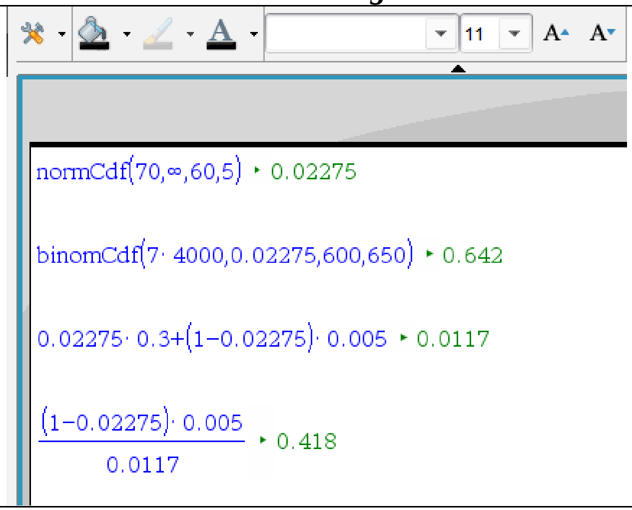
più di un tuorlo.

prob(XL)=0.02275 (2.275%)
prob2T(XL)=0.3 (30%)
prob(normali)=(1-prob2T(XL))=1-0.02275 ▸ 0.977
prob2T(normali)=0.05



Risposta Quesito d):
Le uova che hanno più di un tuorlo sono il 1.17% di tutte le uova

Quesito e)
Calcolare la probabilità che un uovo con più di un tuorlo non sia extra-grande.



Risposta quesito e):
Estratto a caso un uovo e supposto uscito con più tuorli, la probabilità che esso sia normale è il 41.8%

SITOGRAFIA

http://www.eursc.eu (Schola Europaea)
http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2003/matematica2003.html (Matematica 2003)
http://education.ti.com/calculators/products/ITALIA/nspire-family/
http://education.ti.com/calculators/downloads/ITALIA/Software/Search/Results?cp=6002 (downloads)
http://education.ti.com/calculators/downloads/ITALIA/Guidebooks/Search/ (manuali)
http://education.ti.com/calculators/products/ITALIA/loan/ (programma prestito)
http://education.ti.com/calculators/pd/US/ (T^3 –Teacher Teaching with Tecnology)
http://www.atomiclearning.com/ti_nspire_sw (video-tutorials)
http://www.johnhanna.us/TI-nspire.htm (materiali per la didattica - inglese)
http://www.univers-ti-nspire.com/ (materiali per la didattica - Francese)
http://education.ti.com/html/ax/select.html (Activities exchange, in varie lingue tranne….)